Análisis Funcional

Examen IV

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Análisis Funcional
Examen IV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Granada, 2025

Asignatura Análisis Funcional.

Curso Académico 2024/25.

Descripción Examen Ordinario.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Sea $X = C([0,1],\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$. Se define

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\, dt, \qquad \|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\} \qquad \forall f \in X$$

y se escribe $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$, $X_\infty = (X, \|\cdot\|_\infty)$. Definimos el funcional lineal $\delta : X \to \mathbb{R}$ por

$$\delta(f) = f(0) \qquad \forall f \in X$$

a) **[0.75 puntos]** ¿Son equivalentes $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ en X? Justifica tu respuesta.

b) **[0.75 puntos]** ¿Es X_1 completo? Justifica tu respuesta.

c) **[0.75 puntos]** Demuestra que $\delta \in X_\infty^*$ y calcula su norma.

d) **[0.75 puntos]** ¿Es δ continuo respecto a $\|\cdot\|_1$? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Sean $S : c_0 \to c_0$ y $T : l_1 \to l_1$ operadores lineales y supongamos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} [Sx](k) y(k) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)[Ty](k) \qquad \forall x \in c_0, \quad \forall y \in l_1$$

Demuestra que S y T son continuos.

Ejercicio 3 (4 puntos)**.** Sean $1 < p < \infty$ ($p' = p/_{p-1}$), $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto medible y $T : L^{p'}(\Omega) \to L^p(\Omega)^*$ definida mediante

$$\langle Tu, f\rangle = \int_\Omega uf \qquad \forall u \in L^{p'}(\Omega), \quad \forall f \in L^p(\Omega)$$

a) **[1 punto]** Prueba que $\|Tu\|_{L^p(\Omega)^*} = \|u\|_{L^{p'}(\Omega)}$ y que T es inyectivo.

b) **[1 punto]** Usando que $L^p(\Omega)$ es reflexivo, prueba que $T(L^{p'}(\Omega)) = L^p(\Omega)^*$.

Si para $\Omega =]0,1[$ consideramos la sucesión de funciones $\{g_n\}$ definidas mediante $g_n(x) = n^{1/p} e^{-nx}$ para todo $x \in]0,1[$:

c) **[0.5 puntos]** prueba que $\{g_n\} \to 0$ a.e. y que $\{g_n\}$ es acotada en $L^p(\Omega)$.

d) **[0.5 puntos]** Demuestra que $\{g_n\} \not\to 0$ en $L^p(\Omega)$.

e) **[1 punto]** Usando que $C_c(0,1)$ es denso en $L^{p'}(\Omega)$, prueba que $\{g_n\} \to 0$ en la topología débil $\sigma(L^p(\Omega), L^{p'}(\Omega))$.