

Análisis Funcional

Examen IV

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Análisis Funcional

Examen IV

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2025

Asignatura Análisis Funcional.

Curso Académico 2024/25.

Descripción Examen Ordinario.

Ejercicio 1 (3 puntos). Sea $X = C([0, 1], \mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[0, 1]$ a \mathbb{R} . Se define

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)| dt, \quad \|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in [0, 1]\} \quad \forall f \in X$$

y se escribe $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$, $X_\infty = (X, \|\cdot\|_\infty)$. Definimos el funcional lineal $\delta : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\delta(f) = f(0) \quad \forall f \in X$$

- a) [0.75 puntos] ¿Son equivalentes $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ en X ? Justifica tu respuesta.
- b) [0.75 puntos] ¿Es X_1 completo? Justifica tu respuesta.
- c) [0.75 puntos] Demuestra que $\delta \in X_\infty^*$ y calcula su norma.
- d) [0.75 puntos] ¿Es δ continuo respecto a $\|\cdot\|_1$? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 2 (3 puntos). Sean $S : c_0 \rightarrow c_0$ y $T : l_1 \rightarrow l_1$ operadores lineales y supongamos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} [Sx](k)y(k) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)[Ty](k) \quad \forall x \in c_0, \quad \forall y \in l_1$$

Demuestra que S y T son continuos.

Ejercicio 3 (4 puntos). Sean $1 < p < \infty$ ($p' = p/(p-1)$), $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto medible y $T : L^{p'}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)^*$ definida mediante

$$\langle Tu, f \rangle = \int_{\Omega} u f \quad \forall u \in L^{p'}(\Omega), \quad \forall f \in L^p(\Omega)$$

- a) [1 punto] Prueba que $\|Tu\|_{L^p(\Omega)^*} = \|u\|_{L^{p'}(\Omega)}$ y que T es inyectivo.
- b) [1 punto] Usando que $L^p(\Omega)$ es reflexivo, prueba que $T(L^{p'}(\Omega)) = L^p(\Omega)^*$.

Si para $\Omega =]0, 1[$ consideramos la sucesión de funciones $\{g_n\}$ definidas mediante $g_n(x) = n^{1/p} e^{-nx}$ para todo $x \in]0, 1[$:

- c) [0.5 puntos] prueba que $\{g_n\} \rightarrow 0$ a.e. y que $\{g_n\}$ es acotada en $L^p(\Omega)$.
- d) [0.5 puntos] Demuestra que $\{g_n\} \not\rightarrow 0$ en $L^p(\Omega)$.
- e) [1 punto] Usando que $C_c(0, 1)$ es denso en $L^{p'}(\Omega)$, prueba que $\{g_n\} \rightarrow 0$ en la topología débil $\sigma(L^p(\Omega), L^{p'}(\Omega))$.